

26.10.15

Μαθηματική Επαγωγή

$p(n)$ πρόταση, η μεταβλητή σε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$
Έστω ότι a είναι γνήσιος σταθερός αριθμός. Αν τα επόμενα είναι
αληθή:

i) $p(a)$ αληθής, το δείχνουμε

ii) αν $p(k)$ αληθής, τότε $p(k+1)$ αληθής (το δείχνουμε)

► Τότε $p(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq a$.

Ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή

$p(n)$ πρόταση με μεταβλητή το n σε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Έστω a και R γνήσιοι σταθεροί αριθμοί. Αν τα επόμενα είναι αληθή:

i) $p(a), p(a+1), p(a+2), \dots, p(a+R)$ είναι αληθείς (το δείχνουμε)

ii) $\forall k \geq n$, αν θεωρήσουμε ότι $p(i)$ είναι αληθής για $a \leq i \leq k-1$
και δείχνουμε ότι η $p(k)$ είναι αληθής.

► Τότε η $p(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq a$.

Άρχι της κατάς Ανάλυσης

Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ και $S \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει ελάχιστο στοιχείο στο S .
Αντίστροφα $so \in S$ και $so \leq s \forall s \in S$.

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη)

Οι αποσπόμενες τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες.

Π.χ) 1) $S = \mathbb{R}^*$ δεν ιχθεί σε αυτό το σύνολο η Αρχή της καλής διατάξης. Ανταφί δεν υπάρχει $x \in S$ με $x \in S \nmid S \in S$.

2) $S = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n^2 \leq n\} = \emptyset$ δεν ιχθεί.

3) $S = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n = 46 - 7k, k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{N}$ ανεργ.

Αυτό έχει ελάχιστο στοιχείο.

$$n > 0 \Rightarrow 46 - 7k > 0 \Rightarrow 46 > 7k \Rightarrow k = 6 \Rightarrow 50 = 4.$$

Θεώρημα: Ευκλείδεια Διαίρεση

Έστω n ακέραιος και d θετικός φυσικός. Τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q και r με $n = dq + r$, $0 \leq r < d$.

Απόδειξη:

$$\text{Έστω } S = \{s \in \mathbb{N} \mid \text{με } s = n - dk, k \in \mathbb{Z}\} \\ S \neq \emptyset$$

$$\text{Αν } n \geq 0 \Rightarrow n \in S$$

$$\text{Αν } n < 0 \Rightarrow \text{για } k = n \Rightarrow n - dn \geq 0$$

Θα εστιάσουμε την Αρχή της καλής διάταξης:

Έχουμε ελάχιστο στοιχείο και το καλούμε r .

Ανάλυση $r \in S$ και $r \leq d$, $\forall s \in S \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}$ με $n - dq = r$.

Πρέπει να δείξουμε ότι $0 \leq r < d$.

Υποθέτουμε ότι $r \geq d \Rightarrow n - d(q+1) = \underbrace{n - dq}_r - d = r - d \geq 0$

Βρήκαμε στοιχείο $n - d(q+1) < n - dq$.

Αλλά το ελάχιστο είναι το r αδύνατο. Άρα $r < d$.

Μοναδικότητα: Αν είχαμε $n = dp + r = dp' + r'$ με $0 \leq r < r' < d$
 $r - r' = n - dq - (n - dq') = d(q' - q) \leq n$ οπότε του d .

Αδύνατο. Άρα $r - r' = 0 \Rightarrow r = r' \Rightarrow q = q'$.

π.χ 1) Ανάγωγα κλάσματα

$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ και } q \in \mathbb{N}^* \right\}$ με p, q να μην έχουν κοινό διαιρέτη

Έστω $r \in \mathcal{Q} \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*$ με $p \in \mathbb{Z}$.

Με την Α.Κ.Α.

$S = \{ p \in \mathbb{N}^* \mid \exists r \in \mathbb{Z} \}$, $S \neq \emptyset$ έχει ελάχιστο το β_0
Ανδ. $\beta_0 \cdot r \in \mathbb{Z}$

Αν $\beta_0 \cdot r = a_0$ τότε $\frac{a_0}{\beta_0} = r$ είναι ανάγωγο κλάσμα το οποίο

αντιπροσωπεύει τον γινόμενο r .

Παράσταση Φυσικών

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0 10^0 \quad \text{Δεκαδική
αρίθμηση}$$

323	10
-----	----

320	
-----	--

20	
----	--

$$3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

300	1000
-----	------

0	
---	--

Δεκαδικό Σύστημα : Ψηφία 0, 1, 2.

Κάθε αριθμός θα γράφεται σαν άθροισμα δυνάμεων του 2.
με ψηφία το 0 και το 1.

$\left. \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ Ψηφία, δεν αλλάζουν.

Δεκαδικό

Δεκαδικό

0

0

1

1

2

10

3

11

4

100

5

101

Θεώρημα:

Κάθε αριθμός φυσικός n , γράσσεται με βάση το 2 ως εξής:

$$n = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

ώστε

$$a_i \in \{0, 1\} \quad \text{και} \quad a_k \neq 0$$

32	16	8	4	2
15	7	3	1	1

π.χ | $32 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$